龍巖學院
LONGYAN UNIVERSITY

从范畴论的观点看高等代数

龙岩学院　　周金森

高等代数是一门抽象性较强的数学专业基础课，含有丰富的代数学思想，是进一步学习抽象代数、同调代数、李代数的一门重要的基础课程。

经过多年的教学实践，在高等代数的教学中引入范畴论的思想方法，不但能够使学生从更高的观点去透彻把握这门课程，更深入地理解知识间的联系，并且还可以牢固掌握代数学的思想方法，如同构、等价关系及等价分类、直和分解、化归转化等重要思想，体会学习数学的乐趣，而不是枯燥无味，因为掌握数学思想方法比知识更重要。

一、模与范畴的思想

域F上的线性空间就是特殊的模，把线性空间看成对象，把线性映射看成态射，态射的合成是线性映射的乘积，则所有的线性空间构成Abel范畴。

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{A}"] \arrow[d] & W \arrow[r, "\mathrm{B}"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
F^n \arrow[r, "A"] & F^m \arrow[r, "B"] & F^l
\end{tikzcd}
$$

从列的方向来看，我们可以把它看成是函子G，G是双重意义的对应，一方面，它把任一个n维线性空间对应到 F^n，同时在取定两组基下，它把线性映射对应到矩阵，并且满足

$$G(\mathrm{BA}) = G(\mathrm{B})G(\mathrm{A})$$

易证函子G是一个加法、共变、正合、可逆、完全忠实的函子。

二、交换图与同构的思想

交换图是范畴论中非常有用的基本工具和研究对象，在线性空间、线性映射、线性变换的教学中就可以引入交换图。

设V是n维线性空间，W是m维线性空间

$$\mathrm{A}: V \to W$$

是线性映射，取定V的一组基

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和W的一组基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$

设 $\mathrm{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) A$

对于 A, 定义线性映射 $A: F^n \to F^m$，即对任意的

$$X \in F^n, X \mapsto AX$$

另一方面，还存在线性空间的同构定理

$\eta_1 : V \to F^n$　　　$\eta_2 : W \to F^m$

则（1）存在交换图

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{A}"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ F^n \arrow[r, "A"] & F^m \end{tikzcd}$$

即 $\eta_2\mathrm{A} = A\eta_1$ ，且 $\eta_2(\operatorname{Im}\mathrm{A}) = \operatorname{Im}A$

$\eta_1(Ker\mathrm{A}) = KerA$

（2）

$$\dim(\operatorname{Im}\mathrm{A}) = \dim(\operatorname{Im}A) = \dim L\{AX \mid X \in F^n\} = \dim\{A\text{的列空间}\} = r(A)$$

（3）

$$\dim(Ker\mathrm{A}) = \dim(KerA) = \text{方程组}AX = 0\text{的解空间的维数} = n - r(A)$$

（4） 维数公式 $\dim(\operatorname{Im}\mathrm{A}) + \dim(Ker\mathrm{A}) = \dim(V)$

（5）

A是单的线性映射 $\Leftrightarrow Ker\mathrm{A}=\{0\} \Leftrightarrow r(A)=n$

（6）

A是满的线性映射 $\Leftrightarrow \mathrm{Im\,A}=W \Leftrightarrow r(A)=m$

（7）作为线性空间的同构

$$Hom_F(V,W) \cong Hom_F(F^n,F^m) \cong F^{m\times n}$$

通过上述的交换图，就可以把高等代数众多的重要的知识联系起来，如线性相关性、基、维数、坐标、线性映射在基下的矩阵、矩阵的秩、线性方程组的解的理论、单射、满射、同构、子空间等。

再取定V的另一组基 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n'$

和W的另一组基 $\beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_m'$，设

$$\mathrm{A}(\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n') = (\beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_m')B$$

并设基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n'$

的过渡矩阵为P，基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 到基

$\beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_m'$ 的过渡矩阵为Q，

则存在交换图

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{A}"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
F^n \arrow[r, "A"] & F^m \\
F^n \arrow[r, "B"] \arrow[u] & F^m \arrow[u] \\
V \arrow[r, "\mathrm{A}"] \arrow[u] & W \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

即有 $AP = QB$ ，从而

$$B = Q^{-1}AP$$

又因为P，Q为可逆阵，

所以矩阵 A 与 B 相抵，

这就说明了同一个线性映射在两对不同基下所对应的矩阵是相抵；反之也成立，即两个矩阵相抵，它们可以看成同一个线性映射在不同基下所对应的矩阵。因为两个矩阵相抵是等价关系，从而可以进一步求出相抵的标准形，求出尽可能简单的代表元，也就是可以进行等价分类。

从交换图还可以知道同一个线性映射在两对不同基下所导出的不同函子是一个自然等价。

三、化归转化思想

- 设V是n维线性空间，$\mathrm{A}: V \to V$

是线性变换，取定V的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ，设

$$\mathrm{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A$$

对于 A ，定义线性映射 $A: F^n \to F^n$

即对任意的 $X \in F^n, X \mapsto AX$

另一方面，还存在线性空间的同构定理

$$\eta : V \to F^n$$

则（1）存在交换图

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathrm{A}} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^n & \xrightarrow{A} & F^n \end{array}$$

$$\boxed{\eta \mathrm{A} = A \eta}$$

（2）线性变换在不同基下所对应的矩阵是相似;

反之也成立，两个矩阵是相似，它们可以看成同一个线性变换在不同基下所对应的矩阵。

该交换图有助于理解线性变换和矩阵的特征值及特征向量，线性变换和矩阵的是否可对角化问题及相似标准型（若尔当标准型）。

因为作为域F上的结合代数的同构

$$Hom_F(V,V) \cong Hom_F(F^n,F^n) \cong F^{n\times n}$$

则线性变换的三种运算（加法、数乘、乘法）与n阶矩阵的三种运算相互转化，从而为解决问题提供一种极其重要的方法，同时也达到事半功倍的效果，还可以欣赏这一转化的美妙与精彩。

四、对偶函子

- 线性函数作为线性映射的特例，所有的线性函数构成一个线性空间

$$Hom_F(V,F)$$

当然也是模，我们把 $Hom_F(-,F)$

看作是一个对偶函子D，则存在交换图

$$
\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{A} & W \\
\downarrow & & \downarrow \\
Hom_F(V,F) & \xleftarrow{D(A)} & Hom_F(W,F) \\
\downarrow & & \downarrow \\
Hom_F(Hom_F(V,F),F) & \xrightarrow{D^2(A)} & Hom_F(Hom_F(W,F),F)
\end{array}
$$

由于恒等函子I与D^2 是一个自然等价，

这就有助于理解对偶基、对偶空间的概念，

同时也深刻理解：任一个有限维的线性空间

都与它的对偶空间是同构。

五、三个例子

- 例1 给定数域F上有限维线性空间

$$V_i\,(i=0,1,2,\cdots,n+1)$$

其中 $V_0=V_{n+1}=\{0\}$ 是零空间，

线性映射 $f_i:V_i\to V_{i+1}\,(i=0,1,2,\cdots,n)$

满足条件 $Kerf_{i+1}=\operatorname{Im} f_i\,(i=0,1,\cdots,n-1)$

则有 $$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim V_i = 0$$

注：满足例1条件的这个系列

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0$$

称为线性空间的正合列，并且由维数公式易证

例1的结论，这也是模的正合列的长度公式。

例2 设 T 是线性空间V上线性变换，则有

（1） $\{0\} \subseteq KerT \subseteq KerT^2 \subseteq \cdots \subseteq KerT^k \subseteq \cdots$

（2） $V \supseteq \mathrm{Im}T \supseteq \mathrm{Im}T^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}T^k \supseteq \cdots$

（3）若V是n维线性空间，则存在正整数

k,使得$KerT^k = KerT^{k+1}$,并且对一切

$t \geq 1$的整数有 $KerT^k = KerT^{k+t}$

（4）若V是n维线性空间，则存在正整数 s, 使得 $\operatorname{Im} T^{s} = \operatorname{Im} T^{s+1}$，并且对一切 $t \geq 1$ 的整数有 $\operatorname{Im} T^{s} = \operatorname{Im} T^{s+t}$

（5）若V是n维线性空间，则

$$V = Ker T^{k} \oplus \operatorname{Im} T^{k}$$

（6）若V是n维线性空间，则

$$Ker T^{k} = Ker T^{k+1} \Leftrightarrow \operatorname{Im} T^{k} = \operatorname{Im} T^{k+1}$$

例3 设V，U是有限维线性空间，

$\varphi: V \to U$ 是线性映射，则有

（1）存在有限维线性空间W与满的线性映射

$\phi: V \to W$ ，单的线性映射 $\sigma: W \to U$

，使得 $\varphi = \sigma\phi$ 。

（2）（1）中的分解在同构意义下是唯一的，

即若存在另一个有限维线性空间 W_1 与满的

线性映射 $\phi_1:V\to W_1$，单的线性映射 $\sigma_1:W_1\to U$

使得 $\varphi=\sigma_1\phi_1$，则存在线性空间同构

$\theta:W\to W_1$，使得 $\theta\phi=\phi_1,\sigma_1\theta=\sigma$

参考文献

1．林亚南．从线性映射的维数公式谈起（第二次高等代数研讨会上的发言稿）

2．林亚南．从矩阵的相抵谈起

3．周伯壎．同调代数［M］．科学出版社

4．林亚南，苏秀萍．广义模同构及其在“高等代数”中的应用［J］．宁德师专学报